

# Algorithmes d'Estimation et de Détection en contexte Hétérogène Rang Faible

Arnaud Breloy

Besson Olivier	Professeur	Rapporteur
Chevalier Pascal	Professeur	Rapporteur
Comon Pierre	Directeur de Recherche	Examineur
Chong Chin Yuan	Ingénieur de Recherche	Examineur
Ginolhac Guillaume	Professeur	Examineur (Directeur)
Pascal Frédéric	Professeur	Examineur (Encadrant)
Forster Philippe	Professeur	Examineur (Encadrant)



## Introduction

Estimation de la matrice de covariance en contexte hétérogène rang faible

Estimation de sous espace fouillis en contexte hétérogène rang faible

Conclusions et perspectives

Introduction

Contexte

État de l'art

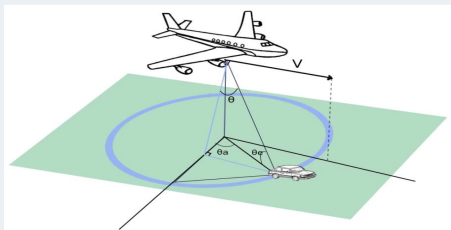
Problématique considérée

Estimation de la matrice de covariance en contexte hétérogène rang faible

Estimation de sous espace fouillis en contexte hétérogène rang faible

Conclusions et perspectives

## Application considérée : radar STAP aéroporté



Signaux reçus par le radar :

- Réponse de cibles mobiles (potentielle)
- Réponse de l'environnement (fouillis)
- Bruit des capteurs

Signaux non déterministes

Bruit et réponse de l'environnement considérés comme aléatoires

→ Traitements statistiques ←

## Traitement statistique du signal

Signaux aléatoires multivariés  $\mathbf{z}_k$  observés, différents traitements :

- Estimation de paramètres
- Détection des cibles

Traitements "optimaux" basés sur la statistique d'ordre 2 (inconnue) :

- Estimation de la matrice de covariance  $\Sigma = \mathbb{E} [\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H]$
- Traitements adaptatifs : basés sur un estimateur  $\hat{\Sigma}$

## A priori généraux

- Les performances des traitements adaptatifs dépendant de la précision d'estimation de  $\Sigma$ .
- La précision d'un estimateur dépend de son adéquation avec le modèle en amont des données.

## Problématiques actuelles

1) Haute résolution :

- Fouillis hétérogènes
- Potentielles données aberrantes (outliers)

2) Grand nombre de capteurs/impulsions :

- Nombre de données  $K$  limité par rapport à la dimension  $M$

Pour avoir des traitements adaptatifs performants :

→ Construire des estimateurs précis malgré ces conditions ←

→ Robustes & Nécessitant peu de données ←

## Un axe de réponse...

Considérer des modèles statistiques adaptés à ces conditions

## Modèle Gaussien

$\mathbf{z} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma)$  a pour densité de probabilité

$$f(\mathbf{z}) \propto |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z}\right)$$

## Sample Covariance Matrix (SCM)

Maximum de vraisemblance de la matrice de covariance :

$$\hat{\Sigma}_{SCM} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H$$

- Si données gaussiennes : Non biaisé, consistant et efficace.
- Asymptotiquement consistant (par TLC).
- Peu précis pour  $K < M$ .
- Peu robuste aux distributions hétérogènes et aux outliers.

## Modèle Complexe Elliptique Symétrique (CES) [Ollila12]

- $\mathbf{z} \sim \mathcal{CE}(\mathbf{0}, \Sigma, g)$  a pour densité de probabilité

$$f(\mathbf{z}) \propto |\Sigma|^{-1} g(\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z})$$

$g$  modélise des distributions à queues plus ou moins lourdes que exp.

- Sous famille : Spherically Invariant Random Vectors (SIRV)

$$\mathbf{z} \sim \sqrt{\tau} \mathbf{c}$$

avec :

- $\mathbf{c} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma)$
- $\tau$  un facteur de puissance aléatoire indépendant (texture).



## M-estimateurs (ou estimateurs robustes)

$$\hat{\Sigma}_M = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \psi \left( \mathbf{z}_k^H \hat{\Sigma}_M^{-1} \mathbf{z}_k \right) \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H$$

→  $\psi(t) = g'(t)/g(t)$  : maximum de vraisemblance pour  $\mathbf{z} \sim \mathcal{CE}(\mathbf{0}, \Sigma, g)$

→  $\psi$  autre : M-estimateur, e.g.

$$\hat{\Sigma}_M = \frac{M}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H}{\mathbf{z}_k^H \hat{\Sigma}_M^{-1} \mathbf{z}_k}$$

$\psi(t) = M/t$  : estimateur du point fixe (FPE). [Tyler87, Pascal08]

- Existence soumise à conditions sur  $\psi$  et  $K > M$ .
- Calculable avec des itérations de point fixe.
- Asymptotiquement non biaisé, et consistant.
- M-estimateurs robustes sur l'ensemble des CES et aux outliers.

## Problème $K < M$

Différentes approches :

- Solution 1 : Régularisation d'estimateurs
- Solution 2 : Estimation structurée

## $K < M$ , solution 1 : SCM régularisée [Ledit04]

$$\hat{\Sigma}_{SSCM}(\beta) = (1 - \beta) \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H + \beta \mathbf{I}_M$$

- Meilleures performances à  $K < M$
- Non robuste** aux distributions hétérogènes.
- Impose un **biais** : problème de choix du  $\beta$ .

## $K < M$ , solution 1 : Régularisation d'estimateurs robustes

Estimateur de Tyler régularisé (SFPE) : [Chen12, Pascal13, Ollila14]

$$\hat{\Sigma}_{SFPE}(\beta) = (1 - \beta) \frac{M}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H}{\mathbf{z}_k^H \hat{\Sigma}_{SFPE}^{-1}(\beta) \mathbf{z}_k} + \beta \mathbf{I}_M$$

existe pour  $\beta \in [\max(0, 1 - K/M), 1]$ .

- Calculable avec des itérations de point fixe.
- Permet de calculer un estimateur **robuste** pour  $K < M$ .
- Impose un **biais** : problème de choix du  $\beta$ .

## $K < M$ , solution 2 : Estimation robuste structurée

Considérations en amont sur le modèle/système :

- A priori sur la structure de la matrice de covariance  $\Sigma \in \mathcal{S}$ .  
e.g. : Toeplitz, persymétrique, rang faible...
- Réduit les degrés de liberté du problème d'estimation :  
meilleures performances à  $K < M$

## SCM sous contrainte de structure

$$\max_{\Sigma} \quad \ln |\Sigma|^{-1} - \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_k^H \Sigma^{-1} \mathbf{z}_k$$

$$\text{s.c.} \quad \Sigma \in \mathcal{S}$$

- Algorithmes à établir selon la structure et la paramétrisation.
  - ▶ Exemple : RC-ML [Kang14], structure rang faible plus identité.
- **Problème de robustesse** persistant.

### $M$ -estimateur sous contrainte de structure [Wiesel12, Sun15, Solov15]

$$\max_{\Sigma} \ln |\Sigma|^{-1} + \sum_{k=1}^K \ln g \left( \mathbf{z}_k^H \Sigma^{-1} \mathbf{z}_k \right)$$

$$\text{s.c.} \quad \Sigma \in \mathcal{S}$$

- Algorithmes à établir selon la structure et la paramétrisation considérée.
- Existence pour  $K < M$  et unicité non démontrée pour toutes les structures.
- Piste de recherche encore active.

## Tableau récapitulatif

	Estimateurs non contraints $K > M$	Estimateurs régularisés $K < M$ Biaisés	Estimateurs structurés $K < M$
Modèle Gaussien Non robuste	SCM	SSCM	RC-ML ...
Modèle CES Robuste	$M$ -estimateurs FPE	SFPE	[Sun15, Solov15] →Breloy←

## Estimation robuste structurée

- Basés sur un à priori de structure
- Considérer le modèle en amont des données

## Problématique considérée : application radar STAP aéroporté

Modèle de données observées :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{b}_k$$

Fouillis  $\mathbf{c}_k$

- Hétérogène (CES, SIRV)
- Loi de Brennan :  
Matrice de covariance rang faible

$$\Sigma_c = \sum_{r=1}^{R < M} c_r \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^H$$

Bruit thermique  $\mathbf{b}_k$

- Blanc gaussien
- Indépendant

Matrice de covariance totale de structure rang faible plus identité

→ Problématique d'estimation robuste structurée! ←

### Différence avec les travaux précédents

- Bruit blanc indépendant : distribution considérée non CES.
- La solution proposée n'est pas un  $M$ -estimateur à structure contrainte.

## Mes contributions : plan de la présentation

- Estimation de la matrice de covariance en contexte hétérogène rang faible
  - ▶ Maximum de vraisemblance du modèle considéré
  - ▶ Algorithmes de calcul
  - ▶ Application à la détection STAP
  
- Estimation du sous espace fouillis en contexte hétérogène rang faible
  - ▶ Estimateurs des vecteurs propres dominants de la matrice de covariance (seulement)
  - ▶ Nouveaux algorithmes
  - ▶ Application au filtrage STAP rang faible



Introduction

Estimation de la matrice de covariance en contexte hétérogène rang faible

Modèle

Expression du problème

Algorithmes développés

Résultats Simulations

Estimation de sous espace fouillis en contexte hétérogène rang faible

Conclusions et perspectives

## Modèle de distribution du fouillis rang faible

Spherically Invariant Random Vector (SIRV) (sous famille des CES)

- Modèle couvrant de nombreuses distributions usuelles  
e.g. K-distribution,  $t$ -distribution, Weibull...
- Bonne correspondance avec des distributions empiriques mesurées

$$\mathbf{c}_k = \sqrt{\tau_k} \mathbf{g}_k$$

- $\mathbf{g}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma_c)$  avec  $\text{rang}(\Sigma_c) = R < M$
- $\tau_k$  : facteur de puissance aléatoire indépendant (texture).

## Modèle de distribution du bruit thermique

$$\mathbf{b}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_M)$$

## Distribution des signaux observés

$$\mathbf{x}_k = \sqrt{\tau_k} \mathbf{g}_k + \mathbf{b}_k$$

SIRV rang faible

- $\mathbf{g} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma_c)$
- $\text{rang}(\Sigma_c) = R \ll M$  **connu**
- $\tau_k$  déterministes inconnus

Bruit blanc gaussien

- $\mathbf{b} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_M)$
- $\sigma^2 = 1$  **connu**

$$(\mathbf{x}_k | \tau_k) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau_k \Sigma_c + \sigma^2 \mathbf{I}_M)$$

## Problème

Estimer  $\Sigma_c$  par maximum de vraisemblance

EMV solution du problème :

$$\begin{aligned} \min_{\Sigma_k, \{\tau_k\}, \Sigma_c} & \sum_{k=1}^K \log \det(\Sigma_k) + \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_k^H \Sigma_k^{-1} \mathbf{z}_k \\ \text{c.c.} & \Sigma_k = \tau_k \Sigma_c + \mathbf{I}_M \\ & \tau_k \geq 0 \\ & \text{rank}(\Sigma_c) \leq R \end{aligned}$$

Problèmes

- Pas de solution analytique directe
- Problème non convexe en  $\Sigma_c, \tau_k$ .
- Contrainte de rang non convexe

## EMV paramétré par SVD solution du problème [Breloy15a]

$$\max_{\{\mathbf{v}_r\}} \sum_{r=1}^R \mathbf{v}_r^H \hat{\mathbf{M}}_r \mathbf{v}_r$$

$$\text{s.c. } \mathbf{v}_r^H \mathbf{v}_r = 1, \quad r \in \llbracket 1, R \rrbracket$$

$$\mathbf{v}_r^H \mathbf{v}_j = 0, \quad r, j \in \llbracket 1, R \rrbracket, \quad r \neq j$$

avec

$$\hat{\mathbf{M}}_r = \sum_{k=1}^K \frac{\hat{c}_r \hat{\tau}_k}{1 + \hat{c}_r \hat{\tau}_k} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H,$$

et où  $\hat{c}_r(\{\hat{\mathbf{v}}_r\})$  et  $\hat{\tau}_k(\{\hat{\mathbf{v}}_r\})$  sont les EMV de  $c_r$  et  $\tau_k$ .

### Problèmes

- Pas de solution analytique pour  $\hat{\mathbf{v}}_r$
  - Paramètres  $\hat{c}_r$  et  $\hat{\tau}_k$  sans solution analytique et fonction de  $\hat{\mathbf{v}}_r$  (définition "point fixe")
- ⇒ Nécessité d'algorithmes itératifs

## Résolution approchée : Algorithme 2SR [Breloy15b]

Principe : maximisation alternée de la vraisemblance

- Étape 1 : mise à jour des  $c_r$  et  $\tau_k$  pour  $\mathbf{v}_r$  fixés sous hypothèse de fort rapport fouillis à bruit :

$$\mathbf{z}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma_k)$$

$$\Sigma_k \approx \begin{bmatrix} \mathbf{v}_c & \mathbf{v}_c^\perp \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_k \text{diag}(\{c_r\}) + \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M-R} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_c & \mathbf{v}_c^\perp \end{bmatrix}^H$$

$\mathbf{V}_c^H \mathbf{z}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau_k \text{diag}(\{c_r\})) \rightarrow$  itérations de point fixe pour obtenir  $c_r$  et  $\tau_k$

- Étape 2 : mise à jour des  $\mathbf{v}_r$  pour  $c_r$  et  $\tau_k$  fixés, résoudre :

$$\max_{\{\mathbf{v}_r\}} \sum_{r=1}^R \mathbf{v}_r^H \left( \sum_{k=1}^K \frac{\hat{c}_r \hat{\tau}_k}{1 + \hat{c}_r \hat{\tau}_k} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H \right) \mathbf{v}_r$$

s.c.  $\mathbf{v}_r$  orthonormés

$\rightarrow$  Descente de gradient sur la variété de Stiefel pour contraindre

## Résolution exacte : Algorithme MM2 [SunBreloy15]

Principe Majoration-Minimisation :

- Mettre à jour cycliquement les blocs  $\{\tau_k\}$ ,  $\{c_r\}$  et  $\{\mathbf{v}_r\}$  en minimisant une fonction de substitution (borne supérieure de l'objectif)
- Solutions analytiques à chaque mise à jour
- Garantie d'augmenter la vraisemblance à chaque itération

## Algorithme MM2

- o Étape 1 : mise à jour des  $\tau_k$  pour  $c_r$  et  $\mathbf{v}_r$  fixés

$$\tau_k^{t+1} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\left( \sum_{r=1}^R s_{kr} \frac{\tau_k^t c_r}{\tau_k^t c_r + 1} \right) \cdot \left( \sum_{r=1}^R \frac{\alpha_{kr}}{1 + c_r \tau_k^t} \right)}{\sum_{r=1}^R \frac{\alpha_{kr} c_r}{1 + c_r \tau_k^t}}$$

- o Étape 2 : mise à jour des  $c_r$  pour  $\tau_k$  et  $\mathbf{v}_r$  fixés

$$c_r^{t+1} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\left( \sum_{k=1}^K s_{kr} \frac{\tau_k c_r^t}{\tau_k c_r^t + 1} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{kr}}{1 + c_r^t \tau_k} \right)}{\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{kr} \tau_k}{1 + c_r^t \tau_k}}$$

- o Étape 3 : mise à jour des  $\mathbf{v}_r$  pour  $c_r$  et  $\tau_k$  fixés

$$\mathbf{M}_r = \sum_{k=1}^K (\tau_k c_r / (\tau_k c_r + 1)) \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H.$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{M}_1 \mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{M}_R \mathbf{v}_R]$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_A \mathbf{D}_A \mathbf{U}_A^H \text{ (SVD fine).}$$

$$\text{Mettre à jour } \mathbf{V} \text{ avec } \mathbf{V} = \mathbf{V}_A \mathbf{U}_A^H.$$



## Paramètres de simulation

Critère NMSE :

$$\text{NMSE}(\hat{\Sigma}) = \mathbb{E} \left( \frac{\|\hat{\Sigma} - \Sigma\|^2}{\|\Sigma\|^2} \right)$$

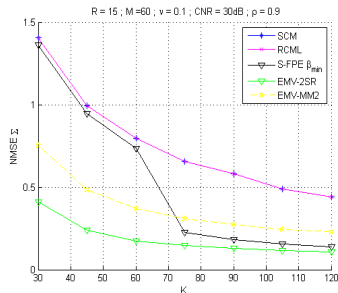
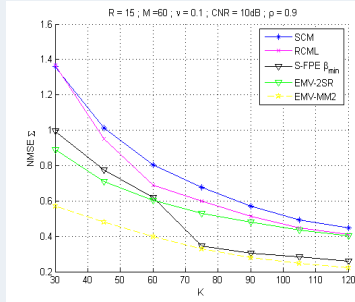
Paramètres :

- $M = 60$  et  $R = 15$
- Textures : loi Gamma de paramètre de forme  $\nu = 0.1$  et d'échelle  $1/\nu$
- $\Sigma_c$  matrice Toeplitz (tronquée) de paramètre  $\rho = 0.9$

## Estimateurs comparés

- $\hat{\Sigma}_{SCM}$  : Sample Covariance Matrix
- $\hat{\Sigma}_{RCML}$  : SCM à structure rang faible contrainte
- $\hat{\Sigma}_{S-FPE}$  : Estimateur de Tyler régularisé avec  $\beta$  minimum
- $\hat{\Sigma}_{EMV-2SR}$  : EMV calculé avec l'algorithme 2SR
- $\hat{\Sigma}_{EMV-MM2}$  : EMV calculé avec l'algorithme MM2

## Résultats de simulations : NMSE en fonction de $K$



## Observations

- Les méthodes développées sont plus performantes que l'état de l'art
- 2SR plus performant à fort CNR (justifie l'approximation)

## Application à la détection STAP

Test d'hypothèse :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z}_0 = \mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_0 & ; \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{b}_k, \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ H_1 : \mathbf{z}_0 = \mathbf{d} + \mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_0 & ; \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{b}_k, \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket \end{cases}$$

où  $\mathbf{d}$  est la cible et  $\mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_0$  est le fouillis plus bruit.

Détecteur Adaptive Normalized Matched Filter (ANMF) :

$$\hat{\Lambda}(\hat{\Sigma}) = \frac{|\mathbf{d}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}_0|^2}{|\mathbf{d}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{d}| |\mathbf{z}_0^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}_0|} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \delta_{\hat{\Sigma}}$$

où  $\hat{\Sigma}$  est un estimateur calculé à l'aide des données secondaires  $\mathbf{z}_k$ .

## Méthodologie

- Seuil réglé pour PFA de  $10^{-3}$  pour chaque estimateur (via Monte-Carlo sous  $H_0$ ).
- On étudie la PD en fonction du rapport signal à bruit.

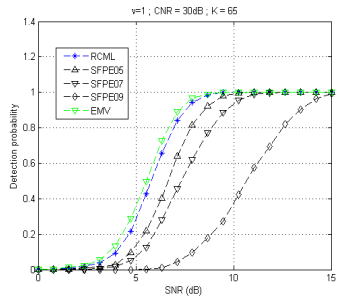
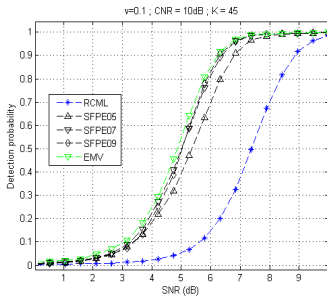
## Détection STAP - Paramètres du Radar

- Antennes :  $N = 8$
- Impulsions :  $M = 8$
- Signal :  $f_0 = 450$  MHz,  $B = 4$  MHz et  $f_r = 600$  Hz
- Vitesse plateforme :  $V = 100$  m/s
- Cible :  $V_t = 35$  m/s en azimut  $+10^\circ$

## Paramètre fouillis

- Rang du fouillis calculé avec la loi de Brennan :  
 $\Rightarrow R = 15 \ll NM = 64$  : Rang faible
- $\tau$  : loi Gamma de paramètre de forme  $\nu = 0.1$  et d'échelle  $1/\nu$

## Résultats : PD en fonction du SNR



## Observations

- L'estimateur proposé conduit aux meilleures performances
- Le  $\beta$  optimal de SFPE est très dépendant de paramètres
- RCML a de mauvaises performances à K faible et en contexte hétérogène

## Conclusions

- Maximum de vraisemblance du modèle SIRV + bruit blanc gaussien
- Algorithmes de calcul
- Meilleurs résultats en terme de précision d'estimation (NMSE)
- Application : amélioration des performance en détection STAP

## Perspective

- Réduire la complexité des algorithmes
- Certaines applications ne nécessitent pas la connaissance des valeurs propres
- Se focaliser sur l'estimation du sous espace fouillis (vecteurs propres de  $\Sigma_c$ )

Introduction

Estimation de la matrice de covariance en contexte hétérogène rang faible

**Estimation de sous espace fouillis en contexte hétérogène rang faible**

Motivations : Approximation rang faible

Problème

État de l'art

Nouveaux estimateurs de sous espace

Simulation

Conclusions et perspectives

## Approximation rang faible

Matrice de covariance structurée :

$$\Sigma_{tot} = \sum_{r=1}^R (c_r + 1) \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^H + \sum_{r=R+1}^M \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^H$$

l'approximation rang faible consiste en :

$$\Sigma_{tot}^{-1} \approx \Pi_c^\perp \approx \mathbf{I}_M - \Pi_c$$

avec

$$\Pi_c = \sum_{r=1}^R \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^H$$

Les traitements adaptatifs rang faible se basent sur un estimateur de projecteur  $\hat{\Pi}_c$  plutôt qu'un estimateur de la matrice de covariance  $\hat{\Sigma}_{tot}$ .

## Intérêt

- Requier moins d'échantillons (cohérent avec  $\mathbf{K} < \mathbf{M}$ )



## Bruit structuré rang faible

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{b}_k$$

- $\mathbf{c}$  : Bruit gaussien corrélé
- $\mathbf{b}$  : bruit blanc gaussien

$$\Sigma_c = \sum_{r=1}^R c_r \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^H$$
$$\sigma^2 \mathbf{I}_M$$

## Filtrage rang faible $\sim$ annulation d'interférence

Filtre classique :  $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\Sigma}_{SCM}^{-1} \mathbf{d}$

$$\hat{\Pi}_{SCM} = \sum_{r=1}^R \hat{\mathbf{v}}_r \hat{\mathbf{v}}_r^H$$

Filtre rang faible :  $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\Pi}_{SCM}^\perp \mathbf{d}$

de la SVD de  $\hat{\Sigma}_{SCM}$

$\hat{\mathbf{w}}$  atteint  $-3\text{dB}$  de SINR-Loss pour  $K \simeq 2M$

$\hat{\mathbf{w}}_{LR}$  atteint  $-3\text{dB}$  de SINR-Loss pour  $K \simeq 2R \ll 2M$

## Solution classique : SVD d'un estimateur de la matrice de covariance

$$\hat{\Sigma} \longrightarrow SVD \longrightarrow \hat{\Pi}$$

- SVD de la SCM
- SVD d'un estimateur robuste
- SVD d'un estimateur régularisé

## Nouvel outil développé pour le cas non gaussien

- Projecteur issu de l'EMV du modèle (différents algorithmes)

## Motivations

- Développer des algorithmes plus simples
- Utiliser des relaxations sur le modèle (s'affranchir des valeurs propres)
- Compréhension/interprétation des facteurs en jeu

## Estimateur AEMV *[[Breloy13a]*

Hypothèse de valeurs propres égales sur  $\Sigma_c$

$$(\mathbf{z}_k | \tau_k) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau_k \mathbf{\Pi}_c + \sigma^2 \mathbf{I})$$

Maximum de vraisemblance du projecteur :  $R$  vecteur propres dominants de

$$\hat{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{\Pi}}_c) = \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\tau}_k}{\hat{\tau}_k + 1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H,$$

où  $\hat{\tau}_k$  est l'EMV des textures :

$$\hat{\tau}_k = \begin{cases} \frac{1}{R} \mathbf{z}_k^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c \mathbf{z}_k - 1 & \text{si } \|\hat{\mathbf{\Pi}}_c \mathbf{z}_k\|^2 > R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Intérêt

- Point fixe : algorithme de maximisation alterné simple et rapide
- Forme maniable (pour éventuels calculs théoriques)

## Interprétation de AEMV

AEMV : SVD de

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^K \frac{\tau_k}{\sigma^2 + \tau_k} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H$$

- favorise les fortes textures  $\tau_k$
- adapté pour l'estimation de projecteur
- A fort CNR
  - ▶  $\tau_k / (\sigma^2 + \tau_k) \rightarrow 1$
  - ▶ AEMV  $\rightarrow$  SCM

FPE : SVD de

$$\hat{\Sigma}_{FPE} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{\tau_k} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H$$

- rejette les fortes textures  $\tau_k$
- adapté pour l'estimation de matrice de covariance

## Robustesse en terme d'estimation de projecteur

- Les estimateurs robustes peuvent rejeter des échantillons pertinents
- la SCM est peu robuste aux outliers (AEMV aussi ?)
- On cherche un meilleur compromis performance-robustesse

## Estimateur RAEMV [Breloy16 ?]

Hypothèse de valeurs propres égales sur  $\Sigma_c$ , corruption par un SIRV orthogonal au fouillis

$$(\mathbf{z}_k | \tau_k) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau_k \mathbf{\Pi}_c + \beta_k \mathbf{\Pi}_c^\perp + \mathbf{I})$$

Maximum de vraisemblance du projecteur :  $R$  vecteur propres dominants de

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^K \left( \frac{\max(0, \tau_k - \beta_k)}{(\beta_k + 1)(\tau_k + 1)} \right) \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H,$$

avec

$$\hat{\tau}_k = \begin{cases} (\mathbf{z}_k^H \mathbf{\Pi}_c \mathbf{z}_k) / R - 1 & \text{si } \|\mathbf{\Pi}_c \mathbf{z}_k\|^2 > R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$\hat{\beta}_k = \begin{cases} (\mathbf{z}_k^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{z}_k) / (M - R) - 1 & \text{si } \|\mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{z}_k\|^2 > M - R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

## intérêt

- Point fixe : algorithme de maximisation alterné simple et rapide
- Se comporte comme AEMV si  $\beta_k = 0$  mais pénalise d'éventuels outliers

## Paramètres de simulation

Critère NMSE :

$$\text{NMSE}(\hat{\mathbf{\Pi}}_c) = \mathbb{E} \left( \frac{\|\hat{\mathbf{\Pi}}_c - \mathbf{\Pi}_c\|^2}{\|\mathbf{\Pi}_c\|^2} \right)$$

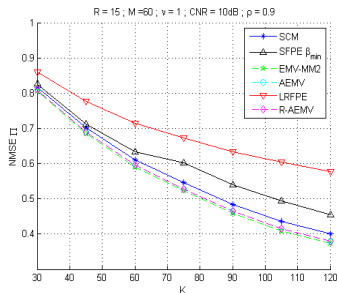
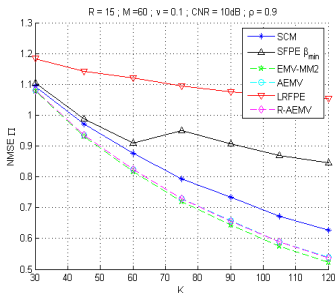
Paramètres :

- $M = 60$  et  $R = 15$
- Textures : loi Gamma de paramètre de forme  $\nu = 0.1$  et d'échelle  $1/\nu$
- $\mathbf{\Sigma}_c$  matrice Toeplitz (tronquée) de paramètre  $\rho = 0.9$

## Estimateurs comparés

- $\hat{\mathbf{\Pi}}_{SCM}$  : Sample Covariance Matrix
- $\hat{\mathbf{\Pi}}_{S-FPE}$  : Estimateur de Tyler régularisé avec  $\beta$  minimum
- $\hat{\mathbf{\Pi}}_{EMV-MM2}$  : EMV calculé avec l'algorithme MM2
- $\hat{\mathbf{\Pi}}_{AEMV}$  : Estimateur AEMV
- $\hat{\mathbf{\Pi}}_{RAEMV}$  : Estimateur RAEMV

## Résultats de simulations : NMSE en fonction de $K$



## Observations

- EMV, AEMV et RAEMV ont des performances similaires
- SCM proche de EMV si bruit gaussien (et fort CNR)
- SFPE moins performant pour ce critère

## Détection STAP - Paramètres du Radar

- Antennes :  $N = 8$
- Impulsions :  $M = 8$
- Signal :  $f_0 = 450$  MHz,  $B = 4$  MHz et  $f_r = 600$  Hz
- Vitesse plateforme :  $V = 100$  m/s
- Cible :  $V_t = 35$  m/s en azimut  $+10^\circ$

## Paramètre fouillis

- Rang du fouillis calculé avec la loi de Brennan :  
 $\Rightarrow R = 15 \ll NM = 64$  : Rang faible
- $\tau$  : loi Gamma de paramètre de forme  $\nu = 0.1$  et d'échelle  $1/\nu$



## Estimateurs

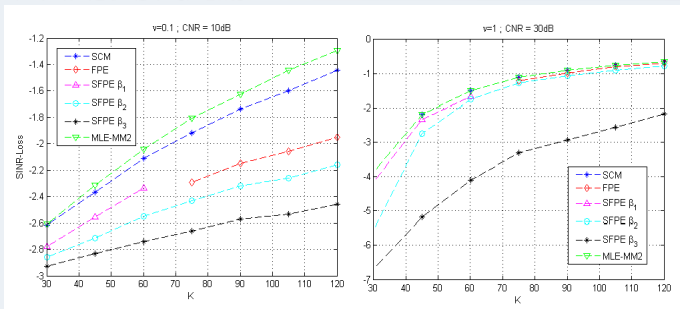
- $\hat{\Pi}_{SCM}$  : Projecteur issu de la SVD de SCM
- $\hat{\Pi}_{FPE}$  : Projecteur issu de la SVD de FPE
- $\hat{\Pi}_{S-FPE}$  : Projecteur issu de la SVD de S-FPE (différents  $\beta$ )
- $\hat{\Pi}_{RAEMV}$  : Estimateur RAEMV

## Critère : SINR-LOSS

for an estimate  $\hat{\Pi}$  :

$$\rho = \frac{(\mathbf{d}^H \hat{\Pi}^\perp \mathbf{d})^2}{(\mathbf{d}^H \hat{\Pi}^\perp \Sigma \hat{\Pi}^\perp \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \Sigma^{-1} \mathbf{d})}$$

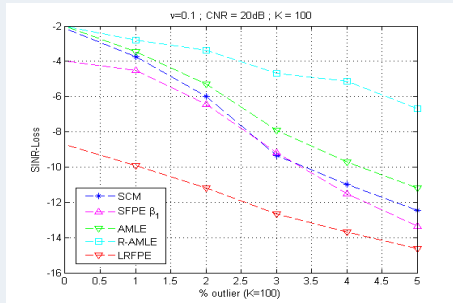
## SINR-Loss en fonction de $K$



## Observations

- Fort CNR, fouillis modérément hétérogène :  $SCM \simeq RAEMV$
- Faible CNR ou fouillis hétérogène : meilleures performances pour RAEMV et SFPE conduit à de moins bonnes performances pour ces conditions

## Robustesse à la contamination



## Observations

- SCM et AMLE peu robustes
- SFPE meilleur mais
- RAEMV plus robuste en général (et meilleures performances si données non contaminées)

Introduction

Estimation de la matrice de covariance en contexte hétérogène rang faible

Estimation de sous espace fouillis en contexte hétérogène rang faible

Conclusions et perspectives

Conclusions

Perspectives

## Conclusions

- Maximum de vraisemblance du modèle SIRV + bruit blanc gaussien
  - ▶ Algorithmes de calcul
  - ▶ Meilleurs résultats en terme de précision d'estimation (NMSE)
  - ▶ Application : amélioration des performance en détection STAP
  
- Estimateurs relaxés du sous espace fouillis
  - ▶ Algorithmes de calculs simplifiés
  - ▶ Performances identiques au maximum de vraisemblance
  - ▶ Estimateur robuste en terme de sous espace
  - ▶ Application en filtrage rang faible

## Perspectives

- Application à détection d'anomalies en imagerie hyperspectrale
  - ▶ Rang et moyenne à estimer simultanément
  - ▶ développement de nouveaux détecteurs rang faible
  
- Etude de performances théoriques
  - ▶ Distribution asymptotique de AEMV et RAEMV
  - ▶ Bornes sur l'estimation sous espace (bornes contraintes ? géodésiques ?)
  - ▶ Un mauvais estimateur de matrice de covariance peut être un bon estimateur de projecteur ?
  
- Estimation robuste pour d'autres structures/régularisations
  - ▶ Régularisation de la SVD (spectre et vecteurs propres dissociés)
  - ▶ Produit de Kronecker (applicable aussi au STAP)